4) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αύξουσα ακολουθία μέτρων στο $(X,\mathcal{A})$. Ορίζουμε, επίσης $\mu: \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ όπου $\mu(A) = \lim_n \mu_n(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.
Νδο το μ είναι μέτρο → καλά ορισμένο αφού $(\mu_n)\uparrow$, θα είτε $\in\mathbb{R}$, είτε $+\infty$.

Απόδειξη

$\mu(\emptyset) = \lim_n \mu_n(\emptyset) = 0$

Αν $A, B \in \mathcal{A}$ ξένα τότε $\mu(A\cup B) = \lim_n \mu_n(A\cup B) =$

$\overset{\text{οριομ.}}{=} \lim_n (\mu_n(A) + \mu_n(B)) = \lim_n \mu_n(A) + \lim_n \mu_n(B) = \mu(A) + \mu(B)$

Άρα, το μ πεπερ προσθετικό μέτρο.
Από προηγούμενη πρόταση αρκεί νδο $\forall (A_m)_{m\in\mathbb{N}} \uparrow$ εν $\mathcal{A}$:
$\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_m \mu(A_m)$, και τότε το μ μέτρο.
Αν $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ όπως παραπάνω τότε:

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \lim_n \mu_n\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \overset{\text{Πρότ.}}{=}$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \lim_m \mu_n(A_m) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{m\in\mathbb{N}} \mu_n(A_m)\right) =$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A_m)\right) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_m) =$$

$$= \lim_m \mu(A_m)$$. Άρα, το μ είναι μέτρο

μ πεπερ προσθ ⇕ Αύξουσα

5) Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μέτρων (πιθανότητας) στον $(X,\mathcal{A})$ και $\mu: \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ με $\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu_n(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$ τότε το μ είναι μέτρο (πιθανότητας)

Απόδειξη

Ορίζουμε $\nu_n(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \mu_i(A)$, $\forall A\in\mathcal{A}$, $n\in\mathbb{N}$

Η $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X,\mathcal{A})$ και $\mu(A)=\lim\limits_n \nu_n(A)$, $\forall A\in\mathcal{A}$.
Απο την άσκηση (4) έπεται ότι το ν είναι μέτρο
Αν κάθε (μ_n) είναι μέτρο πιθανότητα) τότε
$\mu(X)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(X)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<1$.

6) Εστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου
(α) Αν $A,B\in\mathcal{A}$ τότε $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$
(β) Αν $A,B,C\in\mathcal{A}$ τότε:
$\mu(A\cup B\cup C)=\mu(A)+\mu(B)+\mu(C)-\mu(A\cap B)-\mu(B\cap C)-\mu(A\cap C)+\mu(A\cap B\cap C)$
(γ) Αν $A_1,A_2,\dots,A_n\in\mathcal{A}$ τότε:
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\underbrace{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n}_{\text{όλες οι δυνατές } k\text{-άδες}}}\mu(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})$$

Απόδειξη
(α) $\mu(A\cup B)=\mu(A\cup(B\setminus A))=\mu(A)+\mu(B\setminus A)=\mu(A)+\mu(B\setminus(A\cap B))=$
$=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)\Leftrightarrow\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$

(β) $\mu(A\cup B\cup C)=\mu((A\cup B)\cup C)\overset{(\alpha)}{=}\mu(A\cup B)+\mu(C)-\mu((A\cup B)\cap C)=$
$=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)+\mu(C)-\mu((A\cap C)\cup(B\cap C))=$
$=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)+\mu(C)-\mu(A\cap C)-\mu(B\cap C)+\mu(A\cap B\cap C)$
$=\mu(A)+\mu(B)+\mu(C)-\mu(A\cap B)-\mu(A\cap C)-\mu(B\cap C)+\mu(A\cap B\cap C)$.

(γ) Επαγωγικά

7) Να περιγράψετε όλα τα μέτρα στο $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$
Λύση
Αν μ μέτρο στο $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ τότε $\forall A\in\mathcal{A}$ ισχύει
$\mu(A)=\mu\Big(\bigcup\limits_{n\in A}\{n\}\Big)=\sum\limits_{n\in A}\mu(\{n\})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(\{n\})\cdot\delta_n(A)$.
Ετσι, το $\mu=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\delta_n$ όπου $a_n=\mu(\{n\})$ είναι μέτρο, $\forall n$ και $a_n\in[0,+\infty]$

8) Να δωθεί ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ τέτοιο ώστε $\mu((a,\beta)) = +\infty$, $\forall a,\beta \in \mathbb{R}$ για $a<\beta$.

Λύση

Έστω $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ μία αρίθμηση των ρητών

Τότε το $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{q_n}$ μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (βλέπε ασκ 5)

Αν $a<\beta$ με $a,\beta \in \mathbb{R}$ τότε $\mu((a,\beta)) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{q_n}((a,\beta)) =$

$= \sum_{\{n:\, q_n \in (a,\beta)\}} 1 = +\infty$ (Αφού περιέχει άπειρους ρητούς καθε (a,β))

Τέλος, $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{q_n\})$ με $\mu(\underbrace{(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \{q_n\}}_{\text{ξένα ανα δύο}}) = 1, \forall n$

Άρα, το μ είναι σ-πεπερασμένο.

9) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου, και έστω μία οικογένεια $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, αποτελούμενη από ξένα ανά δύο σύνολα τέτοια ώστε $\mu(A) > 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$. Νδο η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη.

Απόδειξη

Θέτοντας $\mathcal{F}_n = \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) > \frac{1}{n}\}$ έχουμε $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$

Αρκεί, νδο κάθε $\mathcal{F}_n$ είναι πεπερασμένο $\forall n \in \mathbb{N}$

Έστω (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ το $\mathcal{F}_{n_0}$ είναι άπειρο. Άρα, $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν $\mathcal{F}_{n_0}$ ($A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m$)

Τότε, θα είναι πεπερασμένο

$+\infty > \mu(X) \geq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_0} = +\infty$ (Σ)

Άρα, $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$ πεπερασμένη και άρα $\mathcal{F}$ αριθμήσιμη

10) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν $\mathcal{A}$

α) $\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$

β) $\mu(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mu(A_n)$ όταν $\underbrace{\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty}_{(*)}$

Λύση

α) $\mu(\liminf_n A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overbrace{\boxed{\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m}}^{\text{αύξουσα}}) = \lim_n \mu(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m) =$

$= \liminf_n \mu(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m) \leq \liminf_n \mu(A_n)$

β) $\mu(\limsup_n A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overbrace{\left[\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right]}^{\text{φθίνουσα}}) \overset{(*)}{=} \lim_n \mu(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) =$

$= \limsup \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \geq \limsup \mu(A_n)$

1º ΛΗΜΜΑ BOREL-CANTELLI :

Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν $\mathcal{A}$ τ/ω $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$. Τότε $\mu(\limsup_n A_n) = 0$

Απόδειξη

$\limsup_n A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

Αριθμ. Υποπροσθ.

Τότε, $\mu(\limsup_n A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m)$

Εφόσον, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ έπεται ότι:

$\lim_n \left(\sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_n)\right) = 0 \quad (*)$

Άρα, $\mu(\limsup_n A_n) = 0$

$(*)$ Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ τότε $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ συγκλίνουσα

Δηλαδή, $S_n \to x$, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$

Άρα, $x - S_n \to 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3º

Ορισμός: Εστω X τυχόν σύνολο.
Μια συνολοσυνάρτηση $\varphi: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ λέγεται εξωτερικό μέτρο στο X, αν:

1) $\varphi(\emptyset) = 0$
2) Αν A, B εν $\mathcal{P}(X)$ με $A \subset B$ τότε $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ (Αύξουσα)
3) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν $\mathcal{P}(X)$, τότε:
$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ (σ-υποπροσθετικότητα)

Παραδείγματα:

Έστω X σύνολο και έστω $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$
τέτοια ώστε $\varphi_1(A) = \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ 1 & , A \neq \emptyset \end{cases}$, το οποίο είναι
εξωτερικό μέτρο,
ενώ δεν είναι μέτρο αν το X έχει δύο τουλάχιστον
στοιχεία (επίσης, αν αντί για 1 βάλω $+\infty$ τότε
θα ήταν και μέτρο), και $\varphi_2(A) = \begin{cases} 0 & , A \text{ αριθμ.} \\ 1 & , A \text{ υπεραριθμ.} \end{cases}$
φ_2 είναι εξωτερικό μέτρο

Ορισμός: Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue λ^* στο $\mathbb{R}$
ορίζεται ως εξής: $\lambda^* : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ όπου
$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}$
για κάθε $A \subset \mathbb{R}$

$\inf\{+\infty\} = +\infty$
λ^* καλά ορισμένη αφού $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$

Πρόταση

α) Το λ^* είναι εξωτερικό μέτρο
β) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ είναι:
$\lambda^*((\alpha,\beta)) = \lambda^*((\alpha,\beta]) = \lambda^*([\alpha,\beta]) = \lambda^*([\alpha,\beta]) = \beta - \alpha$
γ) $\lambda^*(I) = +\infty$, $\forall I$ μη φραγμένο διάστημα

Απόδειξη

α) 1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$ αφού αν θέσω $\alpha_n = 0$ & $b_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$
$\emptyset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, \beta_n)$
$\sum (b_n - a_n) = \sum \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \to 0 \leq \lambda^*(\emptyset) \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$
Άρα, $\lambda^*(\emptyset) = 0$

2. Αν $A \subset B \subset \mathbb{R} \to \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$
διότι για κάθε ακολουθία $(a_n, \beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που
καλύπτει το B, καλύπτει και το A

3. $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$, $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Αν $\sum_{n=1} \lambda^*(A_n) = +\infty$ ισχύει η προηγούμενη ανίσωση.

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) < +\infty$.

Εστω $\varepsilon > 0$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε ακολουθία διαστημάτων $(a_{ni}, b_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ ώστε $A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_{ni}, b_{ni})$ και $\sum_{i=1}^{\infty} (b_{ni} - a_{ni}) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Η ακολουθία δυο δεικτών $\{(a_{ni}, b_{ni}) : n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη (αφού $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \cong \mathbb{N}$) και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_{ni}, \beta_{ni})$.

Αρα, $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n,i} (b_{ni} - a_{ni}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} (b_{ni} - a_{ni}) \leq$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)\right) + \varepsilon$

Αρα, όταν $\varepsilon \to 0$ $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$

β) Εστω $a, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha \leq \beta$ και δδο $\lambda^*([a,\beta]) = \beta - a$
Εστω ένα $\varepsilon > 0$, τότε $[a,\beta] \subset (a - \frac{\varepsilon}{2}, \beta + \frac{\varepsilon}{2})$
Τότε $\lambda^*([a,\beta]) \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2} - a + \frac{\varepsilon}{2} = \beta - a + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \lambda^*([a,\beta]) \leq \beta - a$
Αντίστροφα, παίρνουμε τυχούσα ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων (a_n, β_n), όπου $[a,\beta] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, \beta_n)$.
Εφόσον το $[a,\beta]$ συμπαγές $\subset \mathbb{R}$ τότε $\exists\, m \in \mathbb{N}$ τ/ω $[a,\beta] \subset \bigcup_{n=1}^{m} (a,\beta)$
Ισχυρισμός: $b - a \leq \sum_{n=1}^{m} (\beta_n - a_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ για κάθε ακολουθία ανοιχτών & φραγμένων διαστημάτων (a_n, β_n) με $[a,\beta] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, \beta_n)$, άρα $b - a \leq \inf\{\dots\} = \lambda^*([a,\beta])$
Αποδεικνύω την πρόταση:
Αν $[\gamma, \delta] \subset \bigcup_{i=1}^{m} (\gamma_i, \delta_i)$, $m \in \mathbb{N}$, $\gamma < \delta$, $\gamma_i < \delta_i$, $\forall i = 1, \dots, m$
Τότε $\delta - \gamma \leq \sum_{i=1}^{m} (\delta_i - \gamma_i)$

Αποδ
Με επαγωγή στο m
Για $m=1$ προφανώς (αφού $[\gamma,\delta] \subset (\gamma_1, \delta_1) \to \gamma_1 < \gamma \leq \delta < \delta_1$)
Υποθέτουμε ότι ισχύει για $m=k$ και δδο ισχύει για $k+1$

Έστω $[\gamma,\delta] \subset \bigcup_{i=1}^{k+1} (\gamma_i,\delta_i)$

Εφόσον, $\delta \in [\gamma,\delta] \Rightarrow \exists\, i_0 \in \{1,\dots,k+1\} : \delta \in (\gamma_{i_0},\delta_{i_0})$
Δίχως βλάβη της γενικότητας ας είναι $i_0 = k+1$ με
$\gamma_{k+1} < \delta < \delta_{k+1}$
Αν $\gamma_{k+1} \leq \gamma$ τότε $\delta - \gamma < \delta_{k+1} - \gamma_{k+1} \leq \sum_{i=1}^{k+1}(\delta_i - \gamma_i)$
Αν $\gamma_{k+1} > \gamma$ τότε το $[\gamma,\gamma_{k+1}] \subset \bigcup_{i=1}^{k} (\gamma_i,\delta_i)$
Άρα, από την επαγωγική υπόθεση
τότε το $\gamma_{k+1} - \gamma \leq \sum_{i=1}^{k}(\delta_i - \gamma_i)$, έτσι
$\delta - \gamma = \delta - \gamma_{k+1} + \gamma_{k+1} - \gamma \leq \delta_{k+1} - \gamma_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}(\delta_i - \gamma_i) = \sum_{i=1}^{k+1}(\delta_i - \gamma_i)$

Έστω ότι $\alpha < \beta$, για μεγάλα n ισχύει:
$[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \subset (a,\beta) \xrightarrow{\lambda^* \nearrow} \lambda([a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]) \leq \lambda^*((a,\beta))$

$\Rightarrow b - a - \frac{2}{n} \leq \lambda^*((a,\beta)) \xrightarrow{n\to\infty} b-a \leq \lambda^*((a,\beta))$

Άρα, $b-a \leq \lambda^*((a,\beta)) \leq \lambda^*([a,\beta]) = b-a$.

γ) Αν το I όχι φραγμένο τότε τούτο θα περιέχει διαστήματα $[a,\beta]$, $\alpha<\beta$ με οσοδήποτε μεγάλο μήκος n, $\forall n$. Αφού, λ^* εξωτερικό (→ μονότονο) τότε $\lambda^*(I) \geq n$, $\forall n \Rightarrow \lambda^*(I) = +\infty$